

8. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием паразитных разрядов с жидкостными электродами // Журнал Средневолжск. Матем. Общ. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 135–139.
9. Галимова Р.К., Якупов З.Я. Концепции магистерских программ // Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 85–94.
10. Якупов З.Я., Яруллин А.А. О помехоустойчивом кодировании // Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 178–180.
11. Якупов З.Я., Яруллин А.А. О роли коллективных стратегий в развитии нанотехнологий // Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 181–183.
12. Якупов З.Я., Филичев А.С. О групповом подходе к доказательству гипотезы Адамара // Научно-техн. вестник Поволжья. – 2016. – №4. – С. 116–119.

#### ABOUT THE DIRECTION OF RBHM AND ITS EVOLUTION

Z.Ya. Yakupov, R.K. Galimova

*In the modern world, the transmission of information through electronic communication channels, as well as processing (in any form) of information, is carried out by means of its coding. In the coding, in turn, the Hadamard matrices are used. At present, it is not known whether there exist Hadamard matrices of all orders that are divisible by four. Finding matrices of higher orders makes it possible to transfer and process information more qualitatively. The work is devoted to the study of the Hadamard problem, the determination of the dependencies between the orders of matrices and the formulas describing them, the modernization of a well-known list of formulas for expressing the orders of these matrices.*

Keywords: theory of information coding, noise-immune coding, Hadamard matrices, Reed-Solomon codes, Hadamard's conjecture.

УДК 517.54

#### КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ ПО ДУГАМ НА ПРОИЗВОЛЬНУЮ МНОГОСВЯЗНУЮ ОБЛАСТЬ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Д.Ф. Абзалилов<sup>1</sup>, Е.А. Широкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> damir.abzalilov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> elena.shirokova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Приближённый метод построения конформного отображения путём репараметризации границы обобщен на случай многосвязных областей. Метод основан на сведении решения интегрального уравнения к системе линейных дифференциальных уравнений и не требует итерационного процесса. Круговое кольцо с разрезами по дугам делится на кольцевые области с границами вдоль разрезов и отображающая функция на каждой из этих областей представляется в виде ряда Лорана.*

**Ключевые слова:** конформное отображение, многосвязная область, интегральные уравнения Фредгольма.

В работе представлен метод приближённого конформного отображения кольца с разрезами по дугам на заданную многосвязную область с гладкой границей. Теория этого метода для односвязных областей была развита в работах [1, 2], обобщение на двусвязную область и численная реализация получены в [3]. Метод основан на репараметризации границы области. Преимуществами метода репараметризации являются следующие: метод не требует дополнительных построений (таких, как триангуляция, упаковка кругами и т.п.), вспомогательных конформных отображений (напр., с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца), метод не использует решения вспомогательных краевых задач (метод Wegmann-а, метод сопряжённых функций), он не требует итерационного процесса.

Решение интегрального уравнения сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Приближённое решение получается при усечении системы. Круговая область разбивается на кольцевые области с границами по дуговым разрезам, на каждой из которых решение записано в виде усеченного ряда Лорана. Такой вид решения обеспечивает гладкость и позволяет в аналитической форме проводить его дифференцирование и интегрирование, что важно при решении прикладных задач.

Рассмотрим  $(N + 1)$ -связную область  $D_z$  ограниченную гладкой внешней кривой  $L_0$  и гладкими внутренними кривыми  $L_s$  заданными в параметрическом виде

$$L_s = \{z = z_s(t), z_s(0) = z_s(2\pi), t \in [0, 2\pi]\}, s = \overline{0, N}.$$

Мы предполагаем, что точка  $z = 0$  лежит внутри контура  $L_0$ . Эта точка может либо лежать внутри области  $D_z$  либо вне её, т.е. в области, ограниченной одним из внутренних контуров, который обозначим  $L_N$ .

Построим конформное отображение единичного круга  $D_\zeta = \{\zeta = re^{i\theta} : r < 1, \theta \in [0, 2\pi]\}$  (в случае  $0 \in D_z$ ) или кругового кольца  $D_\zeta = \{\zeta = re^{i\theta} : R_N < r < 1, \theta \in [0, 2\pi]\}$  (в случае  $0 \notin D_z$ ) с разрезами  $\ell_s$  по дугам  $\zeta = R_s e^{i\theta}, \theta \in [\alpha_s, \beta_s]$  на область  $D_z$  путем перепараметризации границы. Мы будем искать функции  $\theta_s(t)$ ,  $s = \overline{0, N}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , такие, что  $z_s(t(\theta))$  являются граничными значениями аналитической функции  $z(\zeta)$  в  $D_\zeta$ . Параметры  $R_s, \alpha_s, \beta_s$ , определяющие область  $D_\zeta$ , также являются неизвестными и находятся в процессе решения задачи.

Рассмотрим аналитическую в области  $D_z$  функцию  $\zeta(z)$ , отображающую область  $D_z$  на  $D_\zeta$  (с соответствием  $\zeta(0) = 0$  в случае  $0 \in D_z$ ) и аналитическую в  $D_z$  функцию  $\ln \frac{z}{\zeta(z)}$ . Согласно [1] необходимым и достаточным условием для аналитичности  $\ln \frac{z}{\zeta(z)}$  в  $D_z$  является граничное условие

$$\ln \frac{z_s(t)}{R_s e^{i\theta_s(t)}} = \sum_{\sigma=0}^N \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{z_\sigma(\tau)}{R_\sigma e^{i\theta_\sigma(\tau)}} \right) \frac{z'_\sigma(\tau)}{z_\sigma(\tau) - z_s(t)} d\tau, \quad s = \overline{0, N}. \quad (1)$$

Мнимая часть соотношения (1) записывается в виде уравнения Фредгольма

$$q'_s(t) = \sum_{\sigma=0}^N \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q'_\sigma(\tau) K_{\sigma s}(\tau, t) d\tau + p_s(t), \quad s = \overline{0, N}, \quad (2)$$

$$K_{\sigma s}(\tau, t) = -(\arg[z_{\sigma}(\tau) - z_s(t)])'_t, \quad p_s(t) = \sum_{\sigma=0}^N \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\ln|z_{\sigma}(\tau)|]' (\ln|z_{\sigma}(\tau) - z_s(t)|)'_t d\tau,$$

где  $q_s(t) = \arg z_s(t) - \theta_s(t)$ ,  $s = \overline{0, N}$ .

Приближенное решение этого уравнения будем искать в виде ряда Фурье

$$q'_s(t) = \sum_{j=1}^M a_{js} \cos jt + b_{js} \sin jt, \quad t \in [0, 2\pi], \quad s = \overline{0, N}. \quad (3)$$

Существование решения (2) и сходимость приближённого решения к точному для односвязной области при  $M \rightarrow \infty$  показано в работе [2]. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (2) сведено к линейной системе для коэффициентов Фурье  $a_{js}$  and  $b_{js}$ .

Функции  $q_s(t)$ ,  $s = \overline{0, N}$  могут быть восстановлены по производным (3) с точностью до неизвестных постоянных  $q_{0s}$ :

$$q_s(t) = q_{0s} + \tilde{q}_s(t), \quad \tilde{q}_s(t) = \sum_{j=1}^M \frac{a_{js}}{j} \sin jt - \frac{b_{js}}{j} \cos jt, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Далее находим  $\tilde{\theta}_s(t) = \arg z_s(t) - \tilde{q}_s(t)$ ,  $\theta_s(t) = \tilde{\theta}_s(t) - q_{0s}$ . Если перепараметризовать границы, используя обратные функции:  $z_s(\theta) = z_s(t_s(\theta))$ , то можно восстановить отображающую функцию  $z(\zeta)$  по интегральной формуле Коши:

$$z(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^N \int_{\ell_s} \frac{z_s(\theta) R_s e^{i\theta}}{R_s e^{i\theta} - \zeta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^N \int_0^{2\pi} \frac{z_s(t) R_s e^{i\theta_s(t)} \theta'_s(t)}{R_s e^{i\theta_s(t)} - \zeta} dt. \quad (4)$$

Полученное решение может быть приближённо найдено в виде полиномов Лорана в каждом из колец  $R_{s_0} \leq |\zeta| \leq R_{s_0-1}$ :

$$z(\zeta) = \sum_{\substack{0 \leq s \leq N \\ |\zeta| < R_s}} \sum_{k=0}^M c_{ks} \left( \frac{\zeta}{Q_s} \right)^k + \sum_{\substack{0 \leq s \leq N \\ |\zeta| > R_s}} \sum_{k=1}^M c_{-ks} \left( \frac{Q_s}{\zeta} \right)^k,$$

где

$$Q_s = R_s e^{-iq_{0s}} \quad (5)$$

– неизвестные постоянные, а коэффициенты  $c_{ks}$  вычисляются по формулам

$$c_{ks} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_s(t) e^{-ik\tilde{\theta}_s(t)} \theta'_s(t) dt, \quad k = \overline{0, M},$$

$$c_{-ks} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_s(t) e^{ik\tilde{\theta}_s(t)} \theta'_s(t) dt, \quad k = \overline{1, M}.$$

Согласно представлению в виде интеграла Коши (4), вне единичного круга ( $|\zeta| > 1$ ) функция  $z(\zeta)$  обращается в нуль, это приводит к соотношениям

$$\sum_{s=0}^N c_{-ks} Q_s^k = 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (6)$$

В случае  $0 \notin D_z$  интегральное представление (4) обращается в нуль внутри круга ( $|\zeta| < R_N$ ), следовательно

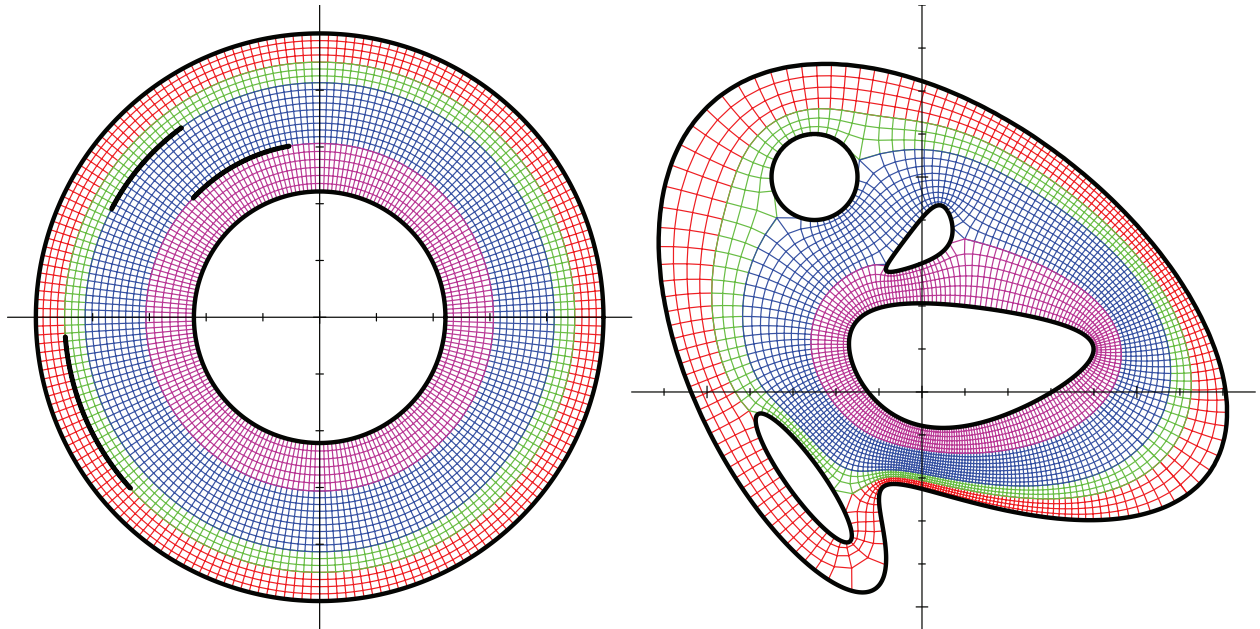
$$\sum_{s=0}^N c_{ks} Q_s^{-k} = 0, \quad k = \overline{0, M}. \quad (7)$$

Комплексные постоянные  $Q_s$  (5) находятся из соотношений (6) и (7) методом наименьших квадратов. Для этого ищется минимум функции

$$\varepsilon(Q_s) = \varepsilon_1(Q_s) + \varepsilon_2(Q_s),$$

$$\varepsilon_1(Q_s) = \sum_{k=1}^M \left( \sum_{s=0}^N c_{-ks} Q_s^k \right)^2, \quad \varepsilon_2(Q_s) = \begin{cases} \sum_{k=0}^M \left( \sum_{s=0}^N c_{ks} Q_s^{-k} \right)^2, & 0 \notin D_z, \\ 0, & 0 \in D_z. \end{cases}$$

Для точного решения минимальное значение  $\varepsilon$  равно нулю, для приближённого оно показывает точность вычислений. Параметры  $\alpha_s$  и  $\beta_s$  определяются как наименьшее и наибольшее значения  $\theta_s(t)$ .



**Рис. 1.** Пример конформного отображения

На рис. 1 показан пример конформного отображения для области, границы которой являются невыпуклыми кривыми:

$$\begin{aligned} L_0 &= \{z = e^{it} - 0.5ie^{2it} + 0.2e^{-2it}\}, \\ L_1 &= \{z = -0.55 - 0.4i - 0.1(1-i)e^{it} - 0.1(1-2i)e^{-it}\}, \\ L_2 &= \{z = -0.5 + i + 0.2e^{-it}\}, \\ L_3 &= \{z = 0.7i + (1+i)(0.04e^{it} + 0.1e^{-it}) - 0.02e^{2it}\}, \\ L_4 &= \{z = 0.2 + 0.15i - 0.1(1+i)e^{it} - 0.3(1-i)e^{-it} - 0.03(1-i)e^{2it}\}. \end{aligned}$$

Исследовалось влияние числа  $M$  коэффициентов ряда Фурье на точность расчётов. Результаты представлены в табл. 1, в ней также указано затраченное время.

Расчёты проводились на персональном компьютере Intel Core i5-3330 3Ghz CPU, 4Gb RAM, программа написана на языке Fortran.

**Таблица 1.1.** Зависимость расчётов от числа коэффициентов ряда Фурье

$M$	$\varepsilon$	Time (s)
25	$0.4916 \cdot 10^{-3}$	0.28
50	$0.3010 \cdot 10^{-4}$	0.42
100	$0.1862 \cdot 10^{-5}$	1.07
200	$0.1158 \cdot 10^{-6}$	4.07
400	$0.7219 \cdot 10^{-8}$	19.84

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-06135).

## Литература

1. Широкова Е. А. О приближенном конформном отображении единичного круга на односвязную область // Изв. вузов. Математика – 2014. – № 3. – С. 57–67.
2. Shirokova E. A., Ivanshin P. N. *Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory* // J. of Compl. Analysis. – 2016.
3. Abzalilov D. F., Shirokova E. A. *The approximate conformal mapping onto simply and doubly connected domains* // Complex Variables and Elliptic Equations – 2017. – V.62. – P. 554–565.

## THE CONFORMAL MAPPING OF AN ANNULUS WITH CIRCULAR SLITS ONTO AN ARBITRARY MULTIPLY CONNECTED DOMAIN WITH SMOOTH BOUNDARY

D.F. Abzalilov, E.A. Shirokova

*The method of boundary curve reparametrization is generalized to the case of multiply connected domains. We construct the approximate analytical conformal mapping of the unit disk or an annulus with circular slits onto an arbitrary given multiply connected bounded domain. The method is based on integral equations solution which is reduced to a linear system solution and does not require iterations. The annulus with slits is divided in annuli with the slits over their borders and the mapping function in each annular region has the form of a Laurent polynomial. The method is easily computable.*

Keywords: conformal mapping, multiply connected domain, Fredholm integral equation.